

INTRODUCCIÓN

Es notable el aumento del uso de materiales compuestos avanzados en la fabricación de elementos estructurales en los últimos años, así pues, los materiales tradicionales como el acero, la madera o el aluminio van cediendo ciertas aplicaciones a materiales compuestos avanzados, llamados composites, con los que se consiguen mejores propiedades específicas.

En particular, los materiales compuestos de matriz polimérica, como por ejemplo los polímeros reforzados con fibras de vidrio, presentan unas excelentes relaciones rigidez/peso y resistencia/peso que los hace idóneos para determinados sectores productivos.

1.1.- Materiales Compuestos, (Plásticos Reforzados)

Se conoce como materiales compuestos a aquellos que son una combinación de dos o más materiales que se diferencian en función, forma o composición a escala macroscópica. Las fases mantienen sus identidades, es decir, no se disuelven o se mezclan completamente, normalmente las fases pueden ser distinguidas físicamente y es posible identificar la interfase entre una y la otra.

La definición de materiales compuestos se puede restringir a aquellos en los que una sustancia componente es el refuerzo (conocida como fibra) soportado por la otra fase que actúa como material aglutinante (conocido como matriz). Esta combinación de diferentes matrices (normalmente se usan polímeros) con distintos materiales o disposiciones de fibra (fibra de vidrio, de carbono, aramidas, orgánicas, entre otras), además se utilizan diferentes tipos de áridos especiales tales como: carburo de sílice, corindón, óxido de alúminas, anhídridos silícicos, etc. Con los cuales se permite conseguir materiales con propiedades mecánicas y químicas muy especiales que se adaptan a los distintos aspectos que requiere un determinado diseño.

Existe pues una gran cantidad de combinaciones posibles y, por lo tanto, muchos tipos de compuestos, con esto se puede distinguir en función de su tipología, como se muestra en la tabla 1.1, o bien en función del tipo de sustancias componentes.

Tabla 1.- Breve clasificación de los compuestos de matriz polimérica según la disposición y el tipo de esfuerzo.

Fibra larga y continua	Fibra orientada unidireccional
	Fibra orientada bidimensionales (tejido, Mat cosido)
	Fibra orientada tridimensional (tejido 3D, cosido 3D)
	Orientación aleatoria (Mat de hilo continuo)
Fibra discontinua	Orientación aleatoria (Mat de hilo troceado)
	Orientación predominante
Partículas y whiskers	Orientación aleatoria
	Orientación predominante

(Barbero, 1998)

Normalmente estos compuestos se presentan en forma de laminados unidireccionales (todo el refuerzo en una misma dirección) o en laminados bidimensionales (láminas apiladas con el refuerzo en distintas orientaciones).

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Las características estructurales más valoradas en los polímeros reforzados con fibra, (FGRP) son sus elevadas propiedades específicas de rigidez y resistencia. Tal como se muestra de forma comparativa en la figura 1.1, con los metales comúnmente utilizados en piezas estructurales (acero y aluminio) no se logran los mismos valores de rigidez y resistencia por unidad de masa que con los FRP.

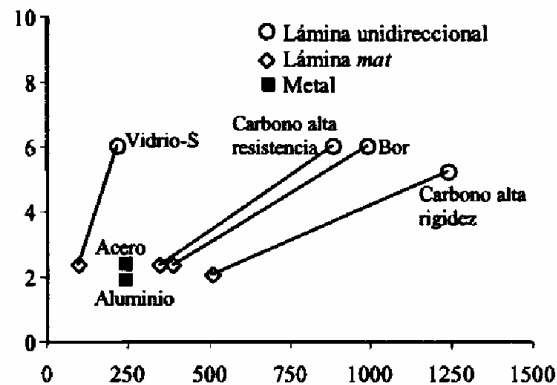


Figura 1.1.- Comparación Entre FRP Y Algunos Metales

Las fibras son las responsables de las buenas propiedades estructurales del composite, sobretodo logran que el material compuesto tenga unas elevadas propiedades específicas de rigidez y resistencia en su dirección longitudinal. En la tabla 1.2 se muestran las propiedades elásticas y de resistencia estática de fibras usadas en polímeros reforzados. Así las principales fibras que se utilizan en plásticos reforzados son de naturaleza cerámica, (las de vidrio, de carbono y de boro), de naturaleza orgánica, (las de aramida).

Las fibras de vidrio tienen una rigidez específica no superior a la de los metales tradicionales, pero tienen amplia aceptación debido a su alta resistencia específica y a su bajo costo.

Tabla 1.2.- Propiedades mecánicas de las fibras mas comunes en FRP.

Fibra	Densidad (ρ)	Resistencia Tracción, S, (GPa)	Modulo Elástico E, (GPa)	Coef. de Poisson (ν)	Modulo Especifico (E/ ρ)
Vidrio E	2.56	3.6	76	0.2	29.1
Vidrio S	2.49	4.5	86	0.22	34.9
Fibra de Carbono	1.80	3.1	228	0.2	126.7
Kevlar 49	1.45	3.62	131	0.35	90.3
Fibra de Boro	2.62	3.1	393	0.20	145.6

(Reisfsnider-case, 2002)

Por otra parte, la matriz es el material aglutinante que permite a las fibras trabajar de forma conjunta transmitiendo los esfuerzos de unas a otras. En la tabla 1.3 se muestran las propiedades elásticas y de resistencia estática de algunas matrices típicas usadas en polímeros reforzados., estas tienen como principales limitaciones la pérdida de propiedades a alta temperatura, su susceptibilidad medioambiental (son afectadas por la humedad, las radiaciones, etc.) y la baja resistencia a esfuerzos cortantes.

Tabla 1.3.- Propiedades mecánicas de las matrices mas comunes en FRP.

Matrices	Densidad (ρ)	Resistencia Tracción, S, (GPa)	Modulo Elástico E, (GPa)	Coef. de Poisson (ν)	Modulo Especifico (E/ ρ)
Poliéster	1.1 – 1.4	0.03 – 0.11	2.1 – 3.4	0.25	2.2
Epóxicas	1.38	0.058	4.6	0.36	5.5
Poliamida	1.46	0.103	3.5	0.35	2.4.7

(Reisfsnider-case, 2002)

1.2.- Diseño Estructural De Elementos Laminados

El diseño de piezas de materiales compuestos es considerablemente más complejo que el diseño de piezas de materiales tradicionales. No sólo se debe idear la geometría del elemento sino también diseñar el propio material. Históricamente, al principio del uso de los materiales compuestos, la secuencia de apilado se limitaba a configuraciones cuasi-isotrópicas, con propiedades parecidas en cualquier dirección de la lámina, como por ejemplo:

- Con secuencias del tipo $[\pm 45, 0, 90]_s$, (laminado simétrico formado por una lámina a $\pm 45^\circ$, una a 0° , dos a 90° , una a 0° y una a $\pm 45^\circ$).

Esto simplificaba el proceso de diseño, ya que gracias a este comportamiento isótropo el compuesto equivalía a un material tradicional de bajo peso. No obstante, estos laminados desaprovechaban la posibilidad de los materiales compuestos para obtener mejores propiedades en las direcciones más solicitadas. Es decir, diseñar las propiedades de material a través de la elección del número y orientación de las láminas que forman el laminado con la finalidad de obtener una rigidez y resistencia que cumpla con los requisitos deseados.

Por lo tanto, en el diseño de una pieza de material compuesto es habitual diseñar la geometría de la pieza y la configuración de los componentes, de forma que se aprovechen mejor las cualidades de este tipo de materiales, reforzando las direcciones con mayor nivel de esfuerzo.

Así, se debe empezar por definir cada uno de los materiales componentes, la orientación del refuerzo en cada lámina u orientaciones del tejido, el espesor de cada una de las láminas (que básicamente dependerá del peso específico del refuerzo o tejido utilizado) y, finalmente, la secuencia de apilado óptima de éstas. Es bien conocido que la secuencia de apilado de las láminas juega un papel crucial en el comportamiento final del laminado.

Por ejemplo, si se considera un laminado formado por láminas del mismo material, con dos láminas orientadas a 0° respecto a la dirección de la carga y una a 90° , con una distribución simétrica, es decir $[0_2, 90]_s$, la rigidez en el plano de la lámina es la misma que la de su distribución inversa, $[90, 0_2]_s$, sin embargo, las propiedades a flexión de cada configuración son bien distintas.

Así, el proceso de diseño (esquemático en la figura 1.2) requiere de un primer paso de definición del problema y de las especificaciones que deberá cumplir el elemento a diseñar. A partir de esta información se genera una serie de soluciones mediante un proceso de síntesis apoyado básicamente por la experiencia y conocimientos del diseñador.

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Las posibles soluciones viables se analizan posteriormente para comprobar su efectividad. Todo este proceso no es lineal, más bien se trata de una tarea iterativa que permite ir mejorando la solución propuesta hasta llegar al diseño final (Barbero, 1998).

Tradicionalmente se ha realizado esta labor, tanto la síntesis como la evaluación, con métodos basados en el conocimiento empírico. Además, como el número de combinaciones posibles de compuestos es prácticamente ilimitado, la caracterización mediante experimentación se hace muy costosa por no decir imposible. La dependencia de la experimentación frena la generalización del uso de los compuestos en aplicaciones más corrientes. Actualmente el uso de modelos matemáticos y métodos numéricos para predecir y simular su comportamiento parece ser un buen camino para el análisis, y el paso necesario para conseguir una buena herramienta de ayuda en este complicado proceso de diseño.

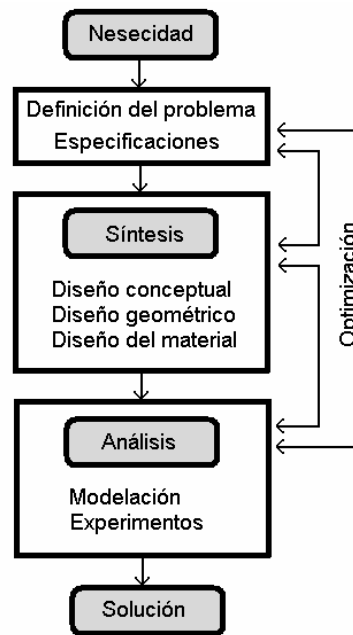


Figura 1.2.- Esquemmatización De Las Etapas Del Diseño

Sin embargo, se observa aún en la mayoría de investigaciones donde se intenta modelar los composites, (utilizando técnicas de simulación numérica) que actualmente no es mas fácil de asegurar la correcta correlación entre les análisis teóricos y los resultados experimentales.

Más difícil es obtener una buena predicción del comportamiento mecánico cuando éste es sometido a niveles de tensión fuera de la zona lineal elástica o durante largos periodos de tiempo.

1.3.- Distintos Enfoques Para El Análisis De Laminados

Uno de los primeros pasos es conocer el comportamiento del propio compuesto ya que se trata de un material altamente heterogéneo. Una de las dificultades en su análisis es la determinación de las propiedades globales, también llamadas efectivas (módulos elásticos o de rigidez, etc.) a partir de las propiedades de sus constituyentes.

Toda esta problemática se complica aun más en los compuestos laminados con fibras orientadas. A causa, principalmente, de la elevada anisotropía de cada lámina y del laminado resultante, y a la existencia de efectos de acoplamiento en las deformaciones (por ejemplo, el acoplamiento tracción -corte).

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

En la actualidad existen distintas alternativas para modelar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Por un lado existen los llamados macromodelos (o modelos macromecánicos) donde se considera el estudio del compuesto a partir de propiedades efectivas.

De este modo es posible estudiar el comportamiento global del compuesto a través de un material homogéneo equivalente, eso sí, teniendo en cuenta que en realidad se trata de un material heterogéneo a pequeña escala.

Por otro lado, en el extremo opuesto existen las aproximaciones a través de micromodelos (o modelos micromecánicos) donde se consideran los mecanismos microestructurales que se establecen entre los diferentes constituyentes que forman el compuesto. Para ello es necesario conocer su disposición y distribución exacta y la interacción que aparece entre ellos.

Dado que el estudio a esta escala de un sólido requiere tener en cuenta la disposición de cada una de las fibras y de cada espacio que ocupa la matriz resulta ser un enfoque impracticable para los polímeros compuestos laminados y, en cualquier caso, la complejidad y el tamaño del modelo necesario para ello haría que el costo computacional fuese demasiado grande. Estos modelos solamente se han utilizado para estudiar fenómenos muy locales de interacción entre los constituyentes.

La aproximación macromecánica necesita de un proceso de homogeneización. Es decir, de una formulación que permita obtener las propiedades efectivas del compuesto para poder tratar su comportamiento como si fuera homogéneo. Muchos de los modelos macromecánicos están basados en la teoría de mezclas para calcular las propiedades efectivas de los compuestos, a través de modelos micromecánicos más evolucionados o bien a partir de ensayos experimentales con probetas sencillas, las hipótesis básicas de la teoría de mezclas clásica son las siguientes:

- Las propiedades mecánicas del compuesto resultan de la participación de cada uno de sus componentes según su fracción volumétrica.
- En un volumen infinitesimal participa una cantidad finita de sustancias componentes.
- Cada sustancia participa en la misma proporción a escala micro y macroscópica.
- La deformación es la misma para cada componente.

Tradicionalmente, la simulación del comportamiento elástico de laminados se ha llevado a término mediante lo que se conoce como teoría de laminados. De hecho a este tipo de enfoque se le puede considerar un modelo cuasi-macro mecánico donde se analiza el comportamiento del laminado suponiendo cada lámina como un sólido de características mecánicas homogéneas, generalmente anisótropas.

Esta teoría impone compatibilidad cinemática entre todas las láminas teniendo en cuenta su posición en el laminado y su grosor. Cualquier deformación del laminado se desglosa en una deformación plana más una deformación de curvatura, asumiendo que el laminado es suficientemente delgado para que el radio de curvatura sea el mismo para todas sus láminas.

La teoría de laminados proporciona, en general, buenos resultados en el campo elástico y para esfuerzos de tracción siempre y cuando, eso sí, el laminado sea lo suficientemente esbelto.

Muchos de estos modelos constitutivos suelen determinar las propiedades de los laminados a partir de características como la orientación y la distribución de las distintas capa unidireccionales de fibra que contienen. En la literatura se pueden distinguir diferentes tipos de aproximaciones analíticas:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Modelos elástico- lineales para laminados planos.

- Modelos para barras laminadas rectas y curvas
- Modelos para placas laminadas o teoría de laminados.

Aunque las aproximaciones anteriores son muy útiles para el diseño, es difícil abordar con ellas estudios del comportamiento más allá del límite elástico o para tiempos largos (fatiga, termofluencia, degradación química, etc.). Las propiedades específicas del compuesto (rigidez, resistencia residual, etc.) se van modificando por el daño progresivo que van adquiriendo los constituyentes durante su servicio por la aparición de distintos sucesos, ya sea en forma de rotura de fibras de refuerzo u otros mecanismos como el agrietamiento de la matriz.

Para ello se hace necesaria la creación de aproximaciones que, sin llegar al detalle de los modelos microestructurales, no pierdan las características de cada una de las sustancias componentes.

TEORIA DEL LAMINADO

2.1.- Análisis De La Relación Esfuerzo-Deformación En Láminas

Generalmente en el estado tridimensional el esfuerzo en un punto del material puede estar descrito por nueve componentes de esfuerzo, σ_{ij} (donde i,j esta en los ejes principales, 123), como se muestra en la figura 1:

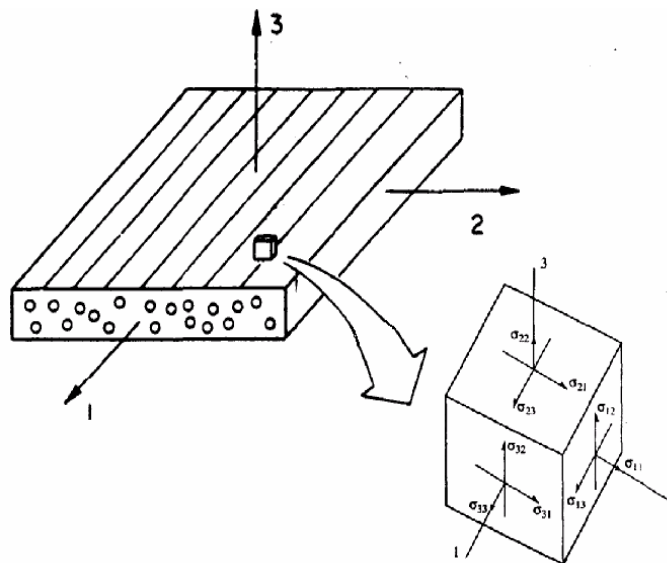


Figura 1. Esfuerzos Tridimensionales En Ejes Principales

2.1.1.- Comportamiento Mecánico De Los Elementos En Los Materiales Compuestos

A continuación se hará un análisis del comportamiento micro-mecánico y del comportamiento macro-mecánico de materiales compuestos reforzados con fibra.

Según lo demostrado esquemáticamente en la figura 2, la micro-mecánica describe los módulos efectivos y los coeficientes de expansión de la lámina formados por la fibra y la resina, la micro-estructura de los compuestos y una fracción volumétrica de los componentes. Se refiere al comportamiento mecánico de materiales compuestos (Solo una lamina de fibra y resina), la

Interacción de estos componentes da como resultado el comportamiento del compuesto básico (en este caso una sola lamina en un laminado).

Un compuesto unidireccional (lamina) es altamente no-isotrópico. Los módulos y la fuerza longitudinal en la dirección de fibra son gobernados por los esfuerzos de las fibras y son altos; mientras que las características mecánicas transversales a la dirección de fibra son gobernadas por los de la resina y por lo tanto son bajas.

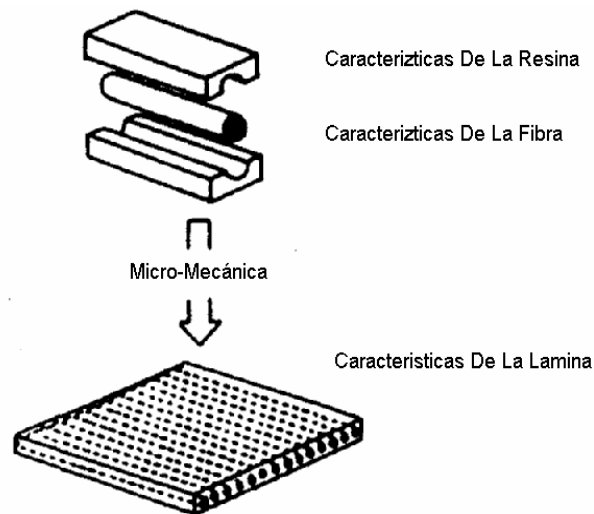


Figura 2. Comportamiento Micro-Mecánico

La macro-mecánica se refiere al comportamiento mecánico de todos los materiales compuestos y de estructuras, figura 3, (en el caso de una lámina, laminado, y estructura).

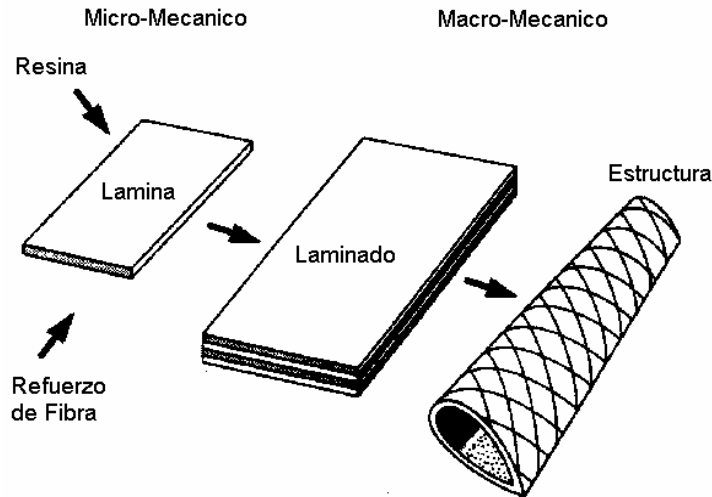


Figura 3. Comportamiento Macro-Mecánico

Este comportamiento macro-mecánico se puede caracterizar por un promedio de esfuerzos y deformaciones y un promedio de las características mecánicas eficaces en un material homogéneo equivalente.

La mayoría de los materiales estructurales metálicos son homogéneos (las características no varían de punto a punto en el material) e isotrópicos (las características no dependen de la orientación), mientras que la mayoría de los materiales compuestos son heterogéneos y no-isotrópicos.

Es decir, las características en un compuesto varían mientras nos movemos desde matriz (resina) a la fibra y mientras que cambiamos la dirección de la orientación de la fibra.

Por ejemplo, en un material isotrópico un esfuerzo normal induce solamente deformaciones normales (las tracción y/o compresión), y un esfuerzo por cizalle induce solamente a deformaciones por cizalle. En un compuesto no-isotrópicos; sin embargo, una esfuerzo normal puede inducir ambas deformaciones normales y deformaciones por cizalle y un esfuerzo de cizalle puede inducir deformaciones por cizalle y deformaciones normales.

A su vez un cambio de temperatura en un material isotrópico causa la expansión o la contracción uniforme en todas las direcciones, mientras que un cambio de temperatura en un material no-isotrópicos; puede causar la expansión o la contracción no uniforme, más la deformación, estos efectos supuestos son llamados "acopladores", ya que tienen implicaciones importantes no solamente en la mecánica analítica, si no que también en la caracterización experimental del comportamiento de estos.

Se espera que estas observaciones generales con respecto a los materiales compuestos proporcionen la motivación para el estudio adicional, donde la caracterización analítica y experimental del comportamiento mecánico de compuestos se discute más adelante.

2.1.2.- Constantes Ortótropas E Isotrópicas En Ingeniería En Planos Tridimensionales

Las "constantes de la ingeniería" son llamadas así cuando un material es caracterizado experimentalmente, por ejemplo, el módulo de Young (o el módulo de elasticidad), módulo de cizalle y el coeficiente de Poisson o radio de Poisson.

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Las constantes de la ingeniería también se utilizan extensamente en el análisis y diseño porque se definen y se interpretan fácilmente en términos de los esfuerzos y deformaciones.

En esta sección se analizarán varias pruebas simples y los resultados de esfuerzos y deformaciones serán utilizados para desarrollar las relaciones tridimensionales y bidimensionales del Esfuerzo-Deformación para los materiales ortotrópicos e isotrópicos.

Considere una prueba simple de tracción uní-axial, figura 4, que consiste en un esfuerzo longitudinal normal, (σ_1) aplicado a lo largo de la dirección del refuerzo de una probeta de un material ortotrópico.

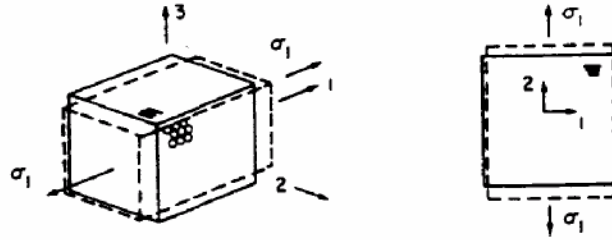


Figura 4. Esfuerzo Longitudinal Normal

Se asume que el resto de los esfuerzos son iguales a cero. Dentro del rango lineal la observación experimental es que los resultados de las deformaciones asociadas a los ejes 1, 2, 3, pueden estar expresados empíricamente en términos de las "constantes de la ingeniería", como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13}\varepsilon_1 = -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \quad (1.4)$$

Donde:

E_1 = Módulo de elasticidad longitudinal asociado a la dirección del eje 1.

$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, es el coeficiente de Poisson, es el coeficiente de la deformación en la dirección de j,

perpendicular a la deformación de la dirección i, cuando la deformación es aplicada en la dirección i.

Para los materiales isotrópicos no hay necesidad de subíndices en tales características como el módulo de la elasticidad y del coeficiente de Poisson porque las características son iguales en todas las direcciones, este no es el caso con los materiales ortotrópicos, ya que los subíndices son necesarios en estas características debido a su naturaleza direccional, Por ejemplo:

(1.5)

$$E_1 \neq E_2, \nu_{12} \neq \nu_{21}$$

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

En las ecuaciones 1.2.y 1.3, con materiales isotrópicos, un signo negativo debe ser usado en la definición del radio de Poisson, además una propiedad como ν_{12} que generalmente se llama el radio de Poisson mayor, mientras que una propiedad como ν_{21} se llama radio de Poisson menor.

Como con los materiales isotrópicos, un esfuerzo normal induce solamente a deformaciones normales, y todos los esfuerzos de cizalle son iguales a cero, esta falta de interacción cizalle/normal se observa solamente para un material en el sistema de coordenadas principal, sin embargo, para cualquier otro sistema de coordenadas el efecto supuesto del "cizalle-acoplador" está presente. Este efecto será discutido detalladamente más adelante.

Ahora bien, se considera un experimento similar con el mismo material, figura 5, donde existe un esfuerzo transversal normal (σ_2).

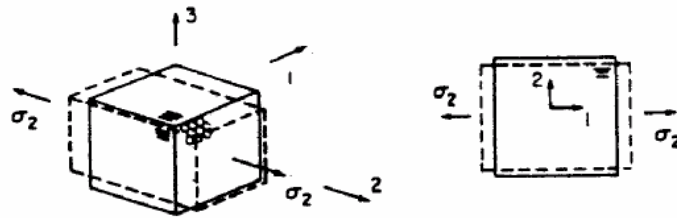


Figura 5. Esfuerzo Transversal Normal

De la misma forma anterior y con todos los otros esfuerzos iguales a cero, la observación experimental de las deformaciones resultantes puede ser expresadas como:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_{21}}{E_2} \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21}\varepsilon_2 = -\nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{23}\varepsilon_2 = -\nu_{213}\frac{\sigma_2}{E_2} \quad (1.8)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \quad (1.9)$$

Donde:

E_2 = Modulo de elasticidad transversal asociado a la dirección del eje 2.

Un resultado similar para el esfuerzo transversal aplicado σ_3 , puede ser obtenido cambiando los subíndices de las ecuaciones anteriores.

Si se considera una prueba de cizalle, figura 6, con el mismo material en el plano 12, el esfuerzo de cizalle $\sigma_{12}=\tau_{12}$ nos queda:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

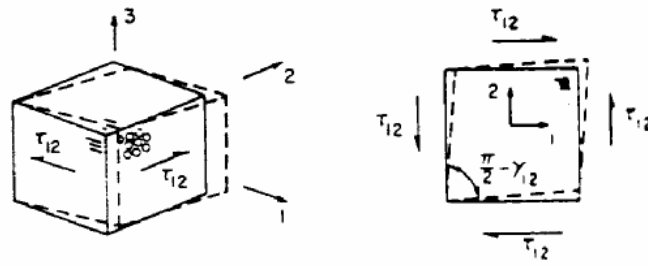


Figura 6. Esfuerzo De Cizalle

La observación experimental demuestra que las deformaciones que resultan se pueden escribir como:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \quad (1.11)$$

Donde:

G_{12} = Modulo de Cizalle asociado al plano 12.

Los resultados obtenidos en los módulos de cizalle de los planos 13 y 23 se obtiene de la misma forma mostrada anteriormente, pero se modifican los subíndices.

Una vez más se hace notar que no hay interacción cizalle/normal (cizalle-acoplador), como se menciono anteriormente; sin embargo, esto es solamente real para materiales en los ejes principales.

Finalmente, se considera un estado tridimensional general de todos los esfuerzos existentes, tanto normales como de cizalle asociadas a los ejes 123.

Puesto que se esta demostrando un comportamiento lineal, es apropiado utilizar la superposición y agregar las deformaciones resultantes debido a la prueba uní-axial simple y de cizalle, así se forma un nuevo sistema de ecuaciones como se muestra en la siguiente matriz, (ecuación 1.12).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

La matriz de rigidez de los materiales ortotrópicos es similar a la forma que tiene la mostrada anteriormente.

2.1.3.- Laminas Ortotrópicas En Planos Bidimensionales

Muy a menudo la lámina se encuentra en un estado donde los esfuerzos están en el plano, ósea son esfuerzos bidimensionales, para el caso de los materiales ortotrópicos en ejes

Principales las relaciones del esfuerzo-deformación quedan especificados en la ecuación 1.12, simplificando $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ y se obtiene la siguiente matriz, (ecuación 1.13).

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{matrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{matrix} \quad (1.13)$$

Donde las variables S_{ij} y las constantes de ingeniería están relacionadas en las siguientes ecuaciones:

$$S_{11} = 1/E_1 \quad (1.14)$$

$$S_{22} = 1/E_2 \quad (1.15)$$

$$S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (1.16)$$

$$S_{66} = 1/G_{12} \quad (1.17)$$

Así, existirán 5 variables que no son ceros y solo 4 variables independientes para la lamina ortotrópica.

Los esfuerzos de las láminas en términos de esfuerzo de tensión, (ecuación 1.18), quedaran matricialmente como:

$$\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{matrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{matrix} \quad (1.18)$$

Donde las Variables Q_{ij} quedan demostradas en la ecuación a.1 del anexo 1.

Obs.: El factor 2, se introduce en la variable Q_{66} de la ecuación 1.18 para compensar el uso de la tensión de deformación por cizalle.

La caracterización experimental de las laminas ortotrópicas implica la medición de cuatro constantes independientes de la ingeniería tales como E_1, E_2, G_{12} y ν_{12} .

La lamina ortotrópica simétrica y balanceada se muestra en la figura 7, a menudo ocurre que cuando el refuerzo de fibra esta tejido en cruz se maneja las capas en 0° y el 90° , en este

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

caso, el número de constantes elásticas independientes de las ecuaciones anteriores se reduce a 3 debido a las características de simetría doble con respecto a los ejes 1 y 2., esto se debe a que:

$$E_1 = E_2 \quad Q_{11} = Q_{22} \quad S_{11} = S_{22} \quad (1.19)$$

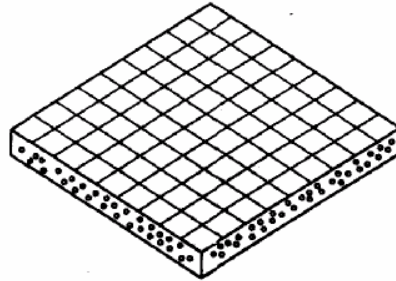


Figura 7. Lamina En Cruz, (Bidireccional)

2.1.4.- Laminas Ortotrópicas En Coordenadas Auxiliares (Off-Axis)

En el análisis de los laminados tenemos múltiples láminas y a menudo se sabe la relación esfuerzo-deformación de los materiales ortotrópicos, generalmente la lámina no se encuentra en las coordenadas principales, a estas coordenadas se las conoce como coordenadas auxiliares o "Off- Axis", por ejemplo xy, como lo muestra la figura 8.

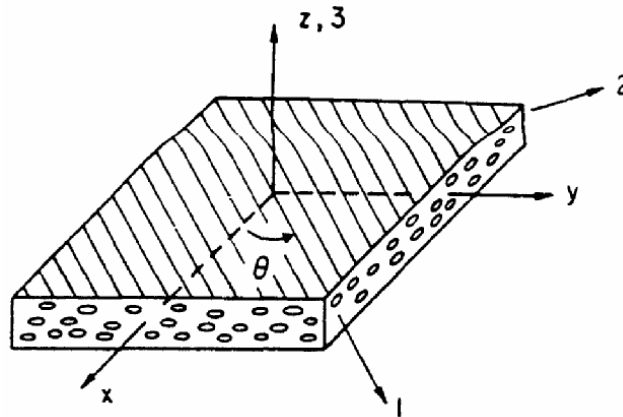


Figura 8. Ejes Auxiliares, (Off-Axis)

Afortunadamente, las constantes elásticas del esfuerzo-deformación de las coordenadas auxiliares se relacionan con las cuatro constantes elásticas independientes en las coordenadas principales y el ángulo de la orientación de la lámina para este caso se denomina θ y es distinto de cero, la figura 9 esquematiza lo dicho anteriormente.

Las transformaciones de las ecuaciones para la relación del esfuerzo y la deformación de los componentes son encontradas combinando los ejes 12 por los ejes xy.

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

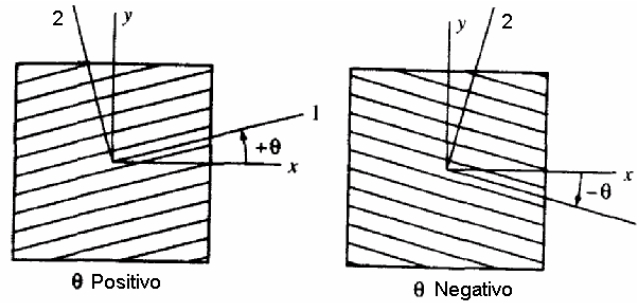


Figura 9. Orientación Del Ángulo θ

Las relaciones para la transformación de los componentes del esfuerzo entre las coordenadas, pueden ser obtenidas escribiendo las ecuaciones del equilibrio estático, figura 10, para el elemento diferenciado.

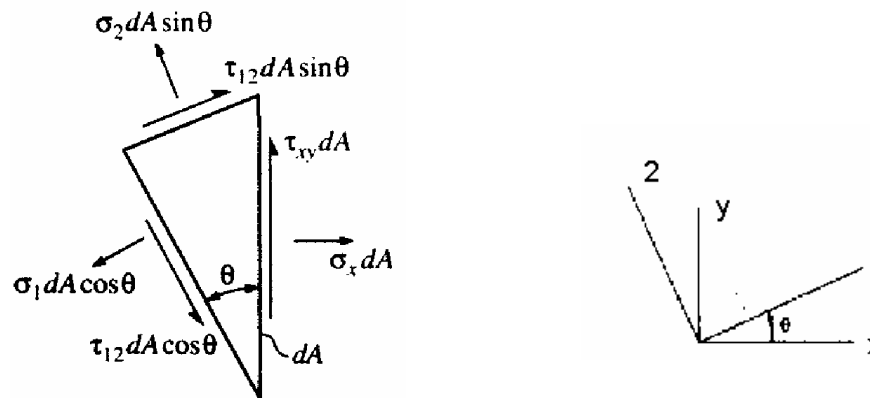


Figura 10. Equilibrio Estático

Por ejemplo, el equilibrio de la fuerza a lo largo de la dirección de x está dado por:

$$\sum F_x = \sigma_x dA - \sigma_1 dA \cos^2 \theta - \sigma_2 dA \cos^2 \theta + 2\tau_{12} dA \cos \theta \cdot \text{sen} \theta = 0 \quad (1.20)$$

Después lo se divide por dA , y se obtiene una ecuación que relaciona σ_x con los esfuerzos en el plano 12:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \cos \theta \cdot \text{sen} \theta = 0 \quad (1.21)$$

Usando el mismo procedimiento para transformar el resto de variables a las nuevas coordenadas podemos obtener un sistema completo de las ecuaciones para los esfuerzos en coordenadas x, y .

Así, se forma siguiente matriz:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} = \begin{pmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2-n^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

Y los esfuerzos en el plano 12 o coordenada principal quedan:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

Hay que tener en cuenta que $m = \cos\theta$ y $n = \sen\theta$

Por lo tanto la matriz de transformación es la matriz $[T]$ y esta definida por:

$$[T] = \begin{pmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2-n^2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Obs.: Los métodos para determinar la matriz inversa $[T]^{-1}$, están descritos en cualquier libro que se refiera a matrices.

También se puede demostrar que las deformaciones por tensión se transforman de los ejes principales a los ejes xy, de la misma forma que los esfuerzos, (ecuaciones 1.23).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

Substituyendo todas las ecuaciones anteriores obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

Donde la matriz de rigidez $[Q]$ se define de la misma forma que para el caso de coordenadas principales.

Al realizar las multiplicaciones indicadas de la matriz y al convertir de nuevo a los esfuerzos de ingeniería, encontramos:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

Donde las variables \bar{Q}_{ij} son componentes de transformación de la matriz de rigidez de la lámina, su definición se encuentra en las ecuaciones a.2 el anexo 1.

Aunque la transformación de la matriz de rigidez de la lamina ahora tiene la misma forma que la de un material no-isotrópico con nueve coeficientes distintos a cero, solamente cuatro de los coeficientes son independientes porque todos ellos pueden estar expresados en términos de los cuatro términos que conforman la matriz de rigidez de la lamina como material ortotrópico, Es decir, el material sigue siendo ortotrópico, pero no es reconocible como tal en los coordenadas auxiliares xy, (Off-Axis).

Como en el caso tridimensional, es obviamente mucho más fácil caracterizar la lámina experimental en los coordenadas principales que en los coordenadas auxiliares xy, (Off-Axis), las constantes de ingeniería se renombran, así las características que se miden normalmente, son relacionados con la matriz de rigidez de la lámina por las ecuaciones a.1 que se encuentra en el anexo 1.

Alternativamente, las deformaciones pueden ser expresadas en los términos de los esfuerzos como se muestra en la siguiente matriz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

Donde los \bar{S}_{ij} son los componentes de transformación de la matriz de la lamina, los cuales son definidos por similares ecuaciones; pero no exactamente de la misma forma como se muestra en las ecuaciones a.2 que se encuentra en el anexo 1.

2.1.5.- Relación Esfuerzo-Deformación Producido Por Los Esfuerzos Higrotérmicos

Puesto que los materiales compuestos con fibra se generan a altas temperaturas, los esfuerzos térmicos se introducen durante el enfriamiento a la temperatura del ambiente, teniendo esfuerzos residuales y cambio de dimensiones, La figura 11 muestra los cambios dimensionales de un compuesto sujetado a temperaturas que se incrementan un ΔT con respecto de T de referencia.

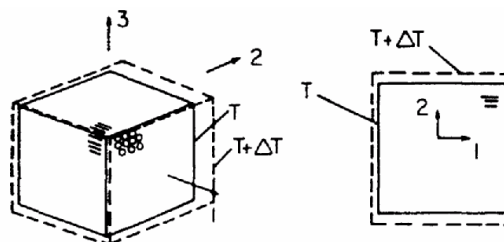


Figura 11. Esfuerzos Termiales

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Además, las matrices poliméricas son comúnmente higroscópicas y absorben la humedad, la cuál conduce a la hinchazón del material compuesto.

En el punto 1.2 se observó que el comportamiento de esfuerzo-deformación en las láminas son desarrollados para el comportamiento elástico lineal y condiciones ambientales constantes, sin embargo, la expansión térmica o la contracción de los materiales estructurales debido al cambio de temperatura es un fenómeno bien conocido, por lo que esfuerzos termales para un material isotrópico son descritos generalmente por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_i^T = \begin{cases} \alpha \Delta T & i = 1,2,3 \\ 0 & i = 4,5,6 \end{cases} \quad (1.28)$$

Donde:

$i=1, 2, 3, 4, 5,6$, llamado notación contraída

ΔT = Cambio de temperatura ($T - T_0$)

T = Temperatura final

T_0 = Temperatura inicial donde $\varepsilon_i^T = 0$ para todo i

α = Coeficiente de expansión térmico.

Esta relación se basa en la observación experimental que un cambio de temperatura en un material isotrópico, induce una expansión o una contracción igual en todas las direcciones sin la distorsión debido a la deformación producida por cizalle.

En este caso $\alpha > 0$ porque un aumento en la temperatura causa un aumento en la deformación, sin embargo, los materiales no-isotrópicos de fibra tiene coeficientes de expansión térmicos negativos a lo largo del eje de la fibra y coeficientes de expansión térmicos positivos a lo largo de la dirección transversal.

En general, la relación de la deformación-temperatura es no lineal, pero se asume linealidad en un rango de temperaturas pequeño.

En materiales poliméricos se ha demostrado que la humedad puede causar expansiones higroscópicas o contracciones análogas a los esfuerzos térmicos.

La observación experimental en las deformaciones inducidas por humedad en materiales isotrópicos se pueden expresar como:

$$\varepsilon_i^M = \begin{cases} (\beta)c & i = 1,2,3 \\ 0 & i = 4,5,6 \end{cases} \quad (1.29)$$

Donde:

C = Concentración de humedad

$$c = \frac{\text{masa - de - humedad - en - unidad - de - volumen}}{\text{masa - de - material - seco - unidad - de - volumen}}$$

β = Coeficiente de expansión higroscópico

Obs.: La condición de referencia se asumió por ser el estado sin humedad $c=0$, donde $\varepsilon_i^M = 0$

Las deformaciones higroscópicas son generalmente funciones no lineales del contenido de humedad, pero la relación lineal de la ecuación 1.21 es válida si el rango de los contenidos de

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

agua no es suficientemente ancho. Así, en un material isotrópico las deformaciones higrotérmicas totales están dadas por:

$$\varepsilon_i^H = (\varepsilon_i^T + \varepsilon_i^M) \quad (1.30)$$

Las fibras tienen generalmente coeficientes de expansión higroscópicos y coeficientes de expansión térmicos que son absolutamente diferentes al de las resinas, ver tablas a.1 y a.2 del anexo 1.

Las deformaciones higrotérmicas en una lámina de materiales compuesto son diferentes en direcciones longitudinales y transversales.

Como se observa en la tabla a.1, los coeficientes de expansión térmica longitudinales de las fibras son negativos, mientras que los transversales son positivos.

Así, los subíndices son necesarios para α y β , y las deformaciones higrotérmicas se asociaron a los ejes 12 o ejes principales, especialmente en la lámina ortotrópica y se deben expresar como:

$$\varepsilon_i^H = \begin{cases} \alpha_i \Delta T + \beta_i c & i = 1, 2, 3 \\ 0 & i = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (1.31)$$

Si el material es transversalmente isotrópico, $\alpha_2 = \alpha_3$ y $\beta_2 = \beta_3$, las deformaciones totales a lo largo de los ejes principales de la lamina ortotrópica, la matriz se obtienen sumando las deformaciones mecánicas debido a los esfuerzos aplicados en la ecuaciones 1.13 y los esfuerzos higrotérmicos de la ecuación 1.31

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{matrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} c \quad (1.32)$$

Se observa que no existen esfuerzos de cizalle y deformaciones higrotérmicas por cizalle en el plano principal o ejes 12, esto no es real en el caso de coordenadas auxiliares xy, para laminas Ortotrópicas, sin embargo para un sistema arbitrario de ejes xy con un ángulo θ orientado a los ejes 12, las relaciones de esfuerzo-deformación se pueden transformar como en la sección 1.4

En la transformación se deber recordar que los coeficientes de expansión térmica y los coeficientes de expansión higroscópica transforman las deformaciones por tensión (Ver ecuaciones 1.25), así se forma la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

De la misma forma los coeficientes de expansión higroscópica.

Estas relaciones completas del esfuerzo-deformación generado por los esfuerzos higroscópicos para las láminas ortotrópicas son:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

$$\begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T + \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} c \quad (1.34)$$

2.2.- Análisis De Laminados

El laminado esta conformado por un número limitado de láminas con una orientación de la fibra aleatoria, (figura 12).

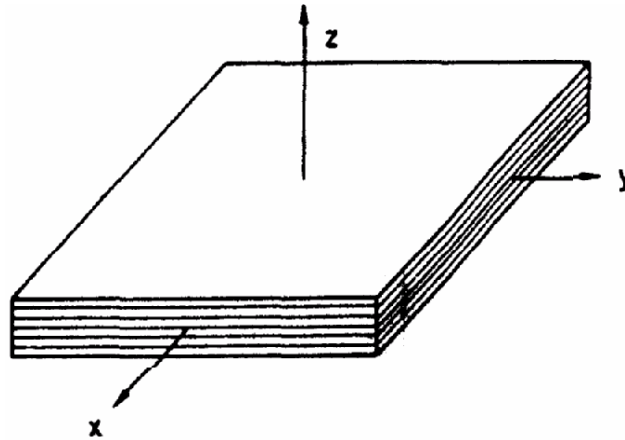


Figura 12. Estructura Del Laminado

2.2.1.- Introducción

Es muy importante conocer el comportamiento mecánico de la lámina para el desarrollo de las teorías del laminado en el análisis de estructuras formadas por materiales compuestos.

Una sola lamina unidireccional; por lo general, no es muy útil como elemento estructural debido a sus características transversales pobres. Es más probable formar una estructura de materiales compuestos consistente en un laminado con láminas o capas múltiples, orientado las fibras en las direcciones deseadas y enlazadas juntas en una unidad estructural.

Las combinaciones de materiales por capa son ilimitadas, y las secuencias de apilamiento ofrecen en la construcción del laminado la flexibilidad del diseño inherente en estructuras compuestas.

Existen muchas teorías que analizan los laminados, entre ellas la teoría del laminado de vigas en flexión pura; sin embargo, esta teoría no analiza los posibles efectos producidos por el acoplamiento, debido a esto, para el caso de láminas ortotrópicas donde existen estos efectos se recomienda analizarlas con la clásica teoría del Laminado. Esta descrita mas adelante.

Es muy necesaria la descripción adecuada de las posibles combinaciones de la orientación de las capas y la secuencia de apilamiento en el laminado, esta descripción de la orientación de las capas esta basado en el código de los ángulos de las capas, separado por slashes se enumeran solo los ángulos de las capas desde la mitad hasta la superficie superior del laminado y se usa el subíndice "s" fuera de los corchetes para demostrar la simetría A su vez, existen otro tipo de descripciones como se muestran en la figura 13.

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

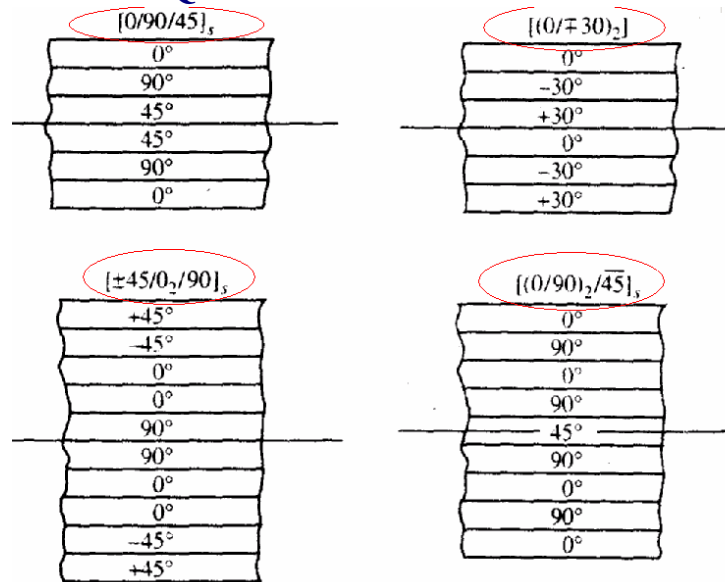


Figura 13. Enumeración Del Laminado

2.2.2.- Teoría Clásica Del Laminado Con Acoplamientos

Esta teoría se utiliza para analizar laminados en general, cuya orientación arbitraria de las capas puede producir los efectos de acoplamiento que conducen a complejas deformaciones por flexión, tensión o torsión. Además, cargas en el plano producidos por el cizalle, fuerza axiales y los momentos de torsión y flexión son incluidos.

La limitación más importante de la teoría clásica de la laminación es que cada una de las capas está asumida para estar en un estado de tensión plana y que las tensiones inter laminar están descuidadas.

Aunque el laminado se compone de láminas múltiples, se asume que las láminas individuales están perfectamente enlazadas para comportarse como una placa ortotrópica, no homogénea.

Los deslices y lazos interfaciales no son permitidos en la deformación por cizalle, cuyo significado del desplazamiento a través del interfaces de la lamina están asumidas para ser continuas. Con esto se asume que la hipótesis de la deformación de la teoría homogénea clásica de la placa se puede utilizar para el laminado ortotrópico.

La figura 14 define el sistema de coordenadas que se utilizará para desarrollar el análisis laminado de la placa, este análisis solamente será estático.

El sistema coordinado del xyz se asume para tener un origen en la superficie media de la placa, de modo que la superficie media se defina el plano xy.

Los desplazamientos en los puntos x, y, z son direcciones u, y, w, respectivamente.

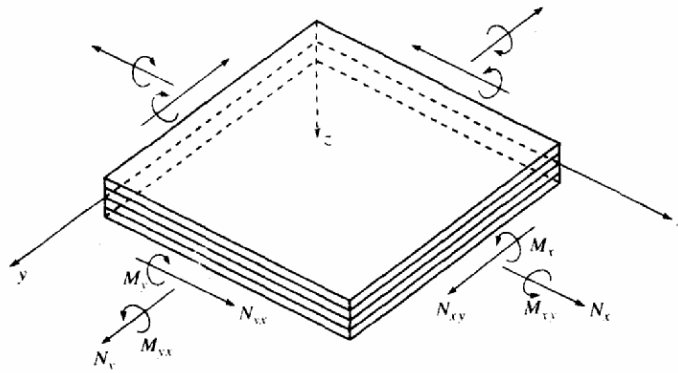


Figura 14. Sistema De Coordenadas Y Esfuerzos Resultantes Por Placa Del Laminado

Para Realizar el análisis estático se asumen 10 ítems relevantes, estos son:

- La placa consiste en una laminado ortotrópico perfectamente enlazado, con los ejes principales orientados a una lamina ortotrópica a lo largo de direcciones arbitrarias con respecto a los ejes xy .
- El espesor de la placa, t , es mucho más pequeñas que las longitudes a lo largo de los bordes de la placa, $(a - b)$.
- Los desplazamientos u , y , y W son pequeños comparado con espesor de la placa, t .
- El en plano las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y τ_{xy} son pequeños comparados con la unidad.
- Las deformaciones transversales por cizalle γ_{xz} y γ_{yz} son insignificantes.
- Los desplazamientos tangenciales u , v son funciones lineales de la coordenada z .
- La deformación transversal normal ϵ_z es in significativa.
- Cada capa obedece a la ley de Hooke.
- espesor de la placa, t , es constante.
- Los esfuerzos transversales de cizalle desaparecen en la superficie de la placa definidas por $z = \pm \frac{t}{2}$.

El ítem e, es un resultado del estado asumido por el esfuerzo plano en cada placa, mientras que los ítems e y f juntos definen la hipótesis de Kirchhoff, con esto según el ítem f y g, los desplazamientos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) + zF_1(x, y) \\ v &= v^0(x, y) + zF_2(x, y) \\ w &= w^0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde:

u^0 y v^0 son los desplazamientos tangenciales de la superficie media a lo largo de las direcciones de x y de y , respectivamente.

Debido al ítem g, los desplazamientos transversales en la superficie media, $w(x, y)$, son iguales que los desplazamientos transversales en cualquier punto que tienen las mismas coordenadas x , y , como se muestra en la ecuaciones 2.1.

A su vez si estas ecuaciones las sustituimos en las ecuaciones de esfuerzo-deformación para deformaciones de cizalle y usando en ítem e, se tiene que:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = F_1(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = F_2(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (2.2)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}F_1(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ F_2(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Substituyendo las ecuaciones 2.1 y 2.3 en las relaciones de deformación-desplazamiento para el-plano de deformación, se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + zk_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Donde las deformaciones en la superficie media son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Y las curvaturas en la superficie media son:

$$\begin{aligned}k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Donde k_x es la curvatura de flexión asociada a la flexión de la superficie media en el plano xz. k_y es la curvatura de flexión asociada a la flexión de la superficie media en el plano yz. k_{xy} es la curvatura de torsión asociada a la torsión fuera del plano en la superficie media.

Para encontrar la relación de esfuerzo-deformación del laminado se substituye la ecuación 2.4 en la ecuación 1.27, con esto obtenemos:

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_y^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Donde:

El subíndice k refiere al lámina del k-ésima.

En el análisis de las capas del laminado, es conveniente utilizar fuerzas y momentos por unidad de longitud antes que fuerzas y momentos. Las fuerzas y los momentos por unidad de longitud mostrados en la figura 14, son también referidas a esfuerzos resultantes, como por ejemplo, las fuerzas por unidad de longitud, (N_x) u los momentos por unidad de longitud, (M_x) estas dada por:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^N \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k dz \right] \quad (2.8)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^N \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k z dz \right] \quad (2.9)$$

Donde:

t= es el espesor del laminado

$(\sigma_x)_k$ = deformación el la lamina k-ésima

z_{k-1} = distancia desde la superficie media hasta el interior de la superficie de la lamina k-ésima

z_k = distancia desde la superficie media hasta el exterior de la superficie de la lamina k-ésima, esto se muestra mejor en la figura 15.

Si sustituimos la relación esfuerzo-deformación de la lámina en la ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9, nos queda:

$$N_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ (\bar{Q}_{11})_k (\varepsilon_x^0 + zk_x) + (\bar{Q}_{12})_k (\varepsilon_y^0 + zk_y) + (\bar{Q}_{16})_k (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) \right\} dz \quad (2.10)$$

$$M_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ (\bar{Q}_{11})_k (\varepsilon_x^0 + zk_x) + (\bar{Q}_{12})_k (\varepsilon_y^0 + zk_y) + (\bar{Q}_{16})_k (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) \right\} z dz \quad (2.11)$$

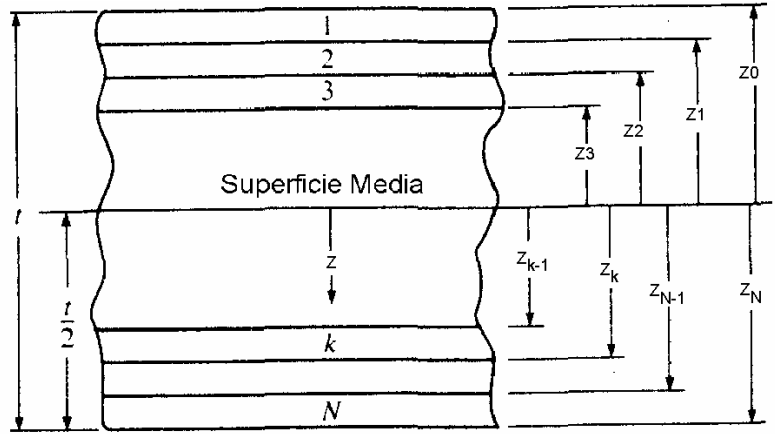


Figura 2.15. Geometría de las capas de laminado y sistema de numeración por capa

Si agrupamos términos y reagrupamos las ecuaciones 2.10 y 2.11, encontramos:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}k_x + B_{12}k_y + B_{16}k_{xy} \quad (2.12)$$

$$M_x = B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}k_x + D_{12}k_y + D_{16}k_{xy} \quad (2.13)$$

Donde las rigideces extensional del laminado esta dado por:

$$A_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^N ((\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})) \quad (2.14)$$

Donde las rigideces acopladoras del laminado esta dado por:

$$B_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ((\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)) \quad (2.15)$$

Donde las rigideces de flexión del laminado esta dado por:

$$D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N ((\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)) \quad (2.16)$$

Así los subíndices ij, vas de 1 hasta 6. Las otras deformaciones resultantes pueden estar escritas de forma similar, y si se completan todas las ecuaciones se obtiene la siguiente matriz de rigidez:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ B & D \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

O se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{21} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

De las ecuaciones anterior se puede notar que la matriz de rigidez extensional [A], se relacionan las fuerzas, {N} en el plano con las deformaciones medias {e°} y la matriz de la rigidez de flexión [D], se relacionan los momentos, {M} con las curvaturas {k}.

La matriz de rigidez con acoplador [B], junta las fuerzas en el plano {N} con las curvaturas {K} y los momentos, {M} con las deformaciones medias {e°}.

Un laminado que tiene B_{ij} distinto a cero se doblará o torcerá bajo cargas en el plano. Tal laminado también exhibirá el en plano medio que se alargara bajo cargas de flexión y momentos de torsión.

2.2.3.- Caracterización De La Rigidez En La Selección De La Configuración Del Laminado

El número de términos distintos a cero en las matrices de rigidez del laminado se reduce para ciertas configuraciones. Simetría o Asimetría de la geometría y propiedades del material sobre la superficie media, orientaciones de la capa y las secuencias de apilamiento de la capa son los factores que gobiernan la forma de la matriz de rigidez del laminado

Es particularmente importante poder entender que los efectos de estos factores en el tipo de acoplamiento que puede existir en las matrices de rigidez comúnmente usadas en laminados

Es útil definir varios términos que se asocian a orientaciones especiales de la capa. Aunque dichas orientaciones, no produzca necesariamente las simplificaciones en las matrices de rigidez, a menudo se utilizan en combinación con otros términos para describir laminados especiales que hagan matrices de rigidez simplificadas

Los laminádoos con laminas en capas tiene laminas orientadas en cada +θ y -θ, donde 0° ≤ θ ≤ 90°.

Dependiendo de secuencias de apilamiento en ángulo de capa en laminados puede ser simétrico, antisimétrico, o asimétrico con respecto a la superficie media.

Cuando las capas de los laminados están en cruz, significa que las capas están orientadas cada θ = 0° o θ = 90°, las capas en cruz de los laminados están balanceados tiene el mismo numero de capas a θ = 0° y θ = 90°.

Puesto que todas las capas en laminados en cruz se comportan como laminas ortotrópicas en planos bidimensionales (Ver Subtitulo 2.1.3), tal laminado tendrá siempre A₁₆ = A₂₆ = D₁₆ = D₂₆ = 0, sin embargo, todos las capas en laminados con capas en ángulo se comportan como laminas ortotrópicas en coordenadas auxiliares, (Ver Subtitulo 2.1.4), Los términos 16 y 26 puede que no dejen de existir.

2.2.3.1.- Laminados Simétricos

El laminado simétrico tiene geometría y propiedades de material simétricos en la superficie media. Es decir, el material de la capa, orientación de la capa, y el espesor de la capa en una distancia z positiva a la superficie media es idéntica a los valores correspondientes en una distancia z negativa a la superficie media. Como se muestran en la figura 16, mientras que la figura 17 muestra una configuración de láminas con capas en angula de $\pm 45^\circ$.

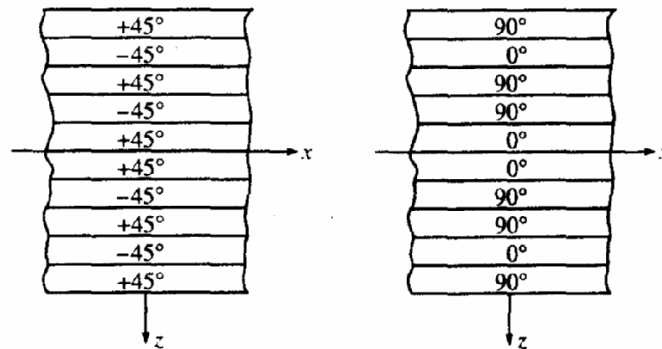


Figura 2.16. Laminados con capas en ángulo y en cruz

Tal condición de simetría cuando está substituida en la ecuación 2.15 conduce a una mayor simplificación de todos los $B_{ij} = 0$. Esto significa que los acoplamientos de flexión-alargamiento no estarán presentes en tales laminados consecuentemente, en el plano no se generara cargas de flexión y curvaturas por torsión cuya causa fuera del plano arqueamientos, flexiones y momentos de torsión no producirán una extensión de la superficie media.

Esto puede ser particularmente importante en estructuras las cuales son subjetivas a cambios en condiciones ambientales, donde las fuerzas higrotérmicas que resultan conducirían al indeseables arqueamientos en laminados no simétricos.

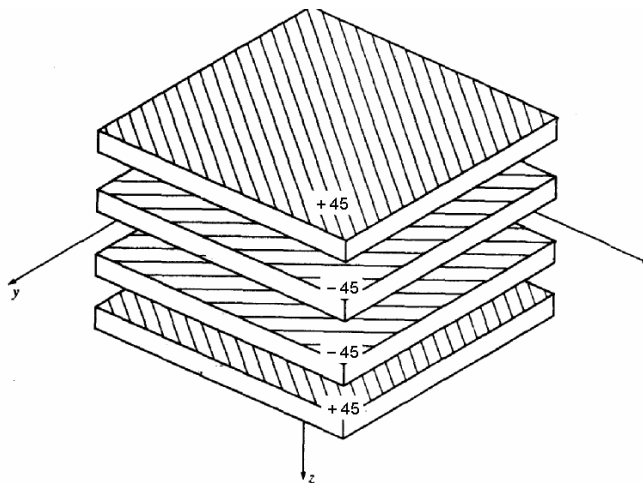


Figura 2.17. Laminados con capas en ángulo de ± 45

2.2.3.2.- Laminados Antisimétricos

Un laminado antisimétrico tiene capas de idéntico material y espesor tiene distancias z iguales tanto positivas como negativas desde la superficie media, pero la orientación de las capas son antisimétricas con respecto a la superficie media. Esto es, si la orientación de las capas una distancia z positiva, es $+\theta$, de lo contrario es $-\theta$, como se muestra en la figura 18, mientras que la figura 19 muestra una configuración de laminas antisimétricas capas en ángulo de 45° .

Note que la definición de antisimetría no significa que sean laminados con capas en cruz, el cual debe ser a menudo simétrico o no-simétrico.

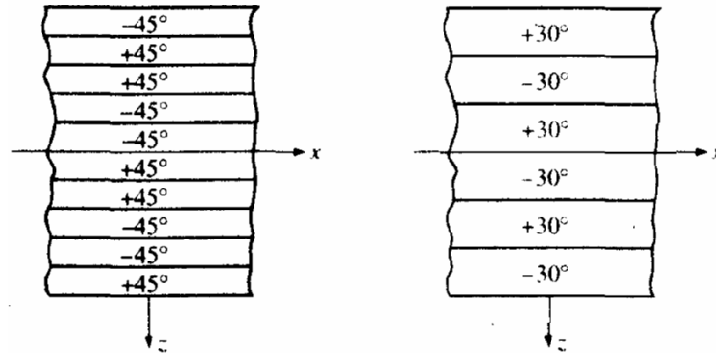


Figura 2.18. Laminados Antisimétricos con capas en ángulo

Esto se puede mostrar si sustituimos las condiciones de antisimetría en las ecuaciones 2.14 y 2.16, los términos de acoplamiento $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$. de la ecuación 2.15 se puede demostrar que $B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0$, para laminados antisimétricos con capas en ángulos.

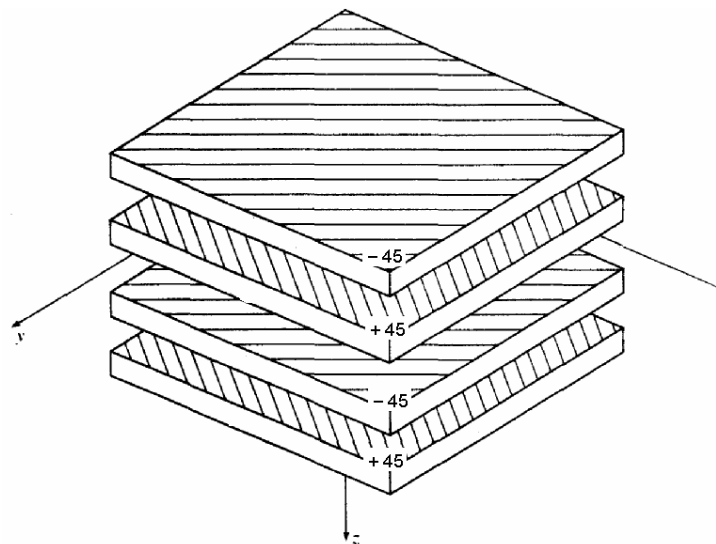


Figura 2.19. Laminados Antisimétricos con capas en ángulo de 45

2.2.4.- Efectos Higrotermales En Laminados

El análisis del comportamiento higrotermal de las laminas se demostró anteriormente, así con esto se puede ampliar este comportamiento a laminados.

Si restringimos otra vez la discusión a los compuestos de la matriz polimérica, los dos efectos principales en el ambiente que cambian el comportamiento higrotérmico en laminados son la degradación de las propiedades de la deformación y cambios en los esfuerzos.

El análisis de ambos efectos será discutido junto con la predicción de los coeficientes de expansión Higrotermales.

Cuando se asume como base la linealidad, es decir se asume que los efectos mecánicos y higrotermales pueden ser tratados separadamente y combinados usando la superposición.

El acoplamiento entre estos efectos se ignorara, esto debido a la no linealidad de las ecuaciones, otra clave que se asume es que la distribución de temperatura y humedad en los laminados sea uniforme, eso es, la concentración de humedad y temperatura son asumidas por ser la misma en cada capa del laminado

2.2.4.1.- Esfuerzos higrotermales en laminados

En la sección 2.1.5 el análisis de los esfuerzos higrotermales son aislados debido a la temperatura y a la humedad, ahora se considerara los esfuerzos correspondientes de la lámina debido a la interacción de la lámina con otras en el laminado.

Los esfuerzos higrotermales no solo se generan durante el uso de los materiales compuestos en varias condiciones ambientales, si no que también en su fabricación. Estos son inducidos por la fabricación y se refieren generalmente como esfuerzos residuales, Los compuestos son procesados, o curados, a elevadas temperaturas y luego enfriados a temperatura ambiente. Debido a la diferencia entre los coeficientes de expansión térmicos de la fibra y matriz en la lamina y la diferencia entre los coeficientes de expansión térmicos de las laminasen los laminados, deformaciones residuales de la fabricación pueden ocurrir a ambos niveles, tanto micromecánicos como macromecánicos.

Particularmente un resultado es importante en los esfuerzos residuales, esto es que, en los laminados no simétricos, los acoplamientos del tipo B_{ij} pueden causar arqueos residuales en el curado del laminado

Las deformaciones totales en la lámina k-ésima provienen de las ecuaciones que se mostraron cuando se analizo estos efectos en las laminas (ver ecuacionl.32) y están dados por :

$$\{\epsilon\}_k = \left[\bar{S} \right]_k \{\sigma\}_k + \{\alpha\}_k \Delta T + \{\beta\}_k c \quad (2.19)$$

Y los esfuerzos están dados por:

$$\{\sigma\}_k = \left[\bar{Q} \right]_k (\{\epsilon\}_k - \{\alpha\}_k \Delta T - \{\beta\}_k c) \quad (2.20)$$

Donde el subíndice k, denota la lámina k-ésima

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Así, se puede obtener los esfuerzos, de la misma forma anterior, pero se considera la lámina k-ésima, y esta dada por:

$$\{\sigma\}_k = \left[\bar{Q} \right]_k (\{\varepsilon\}_k + \{z\}_k - \{\alpha\}_k \Delta T - \{\beta\}_k c) \quad (2.21)$$

Analizando de la misma forma que en la teoría clásica del laminado, podemos obtener las matrices de rigidez con los efectos producidos por los esfuerzos higrotermales, así obtenemos:

$$\{N^E\} = \{N\} + \{N^T\} + \{N^M\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \quad (2.22)$$

$$\{M^E\} = \{M\} + \{M^T\} + \{M^M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (2.23)$$

Por lo tanto se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} N^E \\ M^E \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ B & D \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Donde:

N^E = Son las fuerzas totales efectivas, (mecánicas e higrotermales)

M^E = Son los momentos totales efectivos, (mecánicas e higrotermales)

Si se invierte la ecuación, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} N^E \\ M^E \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Así, los esfuerzos de la lámina, para la combinación de las cargas mecánicas y higrotermales son determinadas usando un procedimiento similar a éste encontrado en la ecuación 2.7. Esto es, las deformaciones y la curvatura en el plano medio son determinadas por las fuerzas y los momentos efectivos totales acorde a la ecuación 2.25, mientras que los esfuerzos máximos son determinados por la ecuación 2.21

DISEÑO PRÁCTICO DE LAMINADOS

Para muchas aplicaciones de composites, el laminado aun no es ortotrópico, pero es anisotrópico, como se muestra en la figura 3.1. Esto ocurre cuando un o laminado ortotrópico está cargado en una dirección que no coincide con uno de los ejes principales, o cuando el laminado aun es simétrico pero no balanceado sobre los ejes de referencia principales

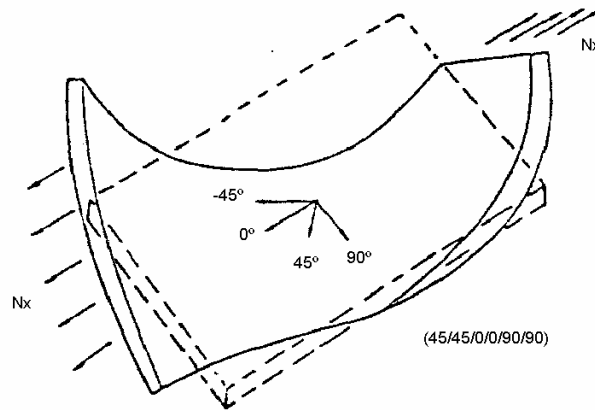


Figura 3.1. Aplicación de cargas en laminado asimétricos causa acoplamiento entre flexión, corte alargamiento y torsión

Por lo general todos los tipos de laminados requieren 6 coeficientes elásticos para definirlos, además como una regla general todo laminado debe poseer simetría sobre su superficie media, por que así se evitara que aparezcan los efectos de acoplamiento, la figura 3.2 muestra los distintos tipos de acoplamiento entre los diferentes tipos de lamina, e incluso laminados simétrico y no simétricos

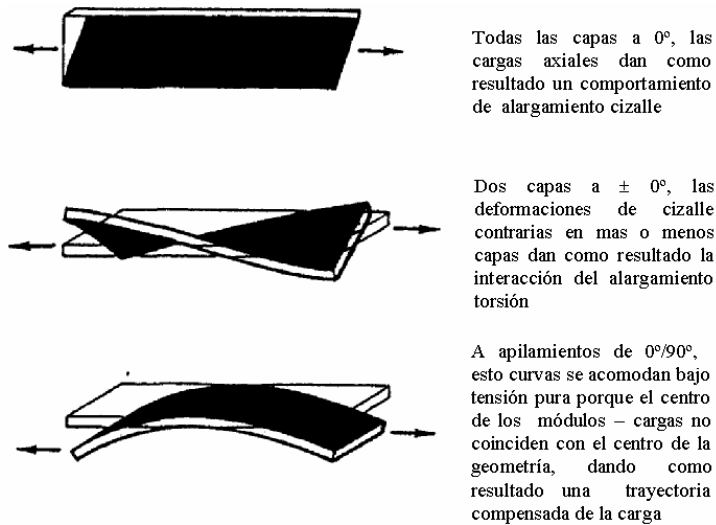


Figura 3.2. Secuencia efectiva de apilamiento en laminados con deflexión

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

La naturaleza direccional de los laminados compuestos proviene de la habilidad de construir un material, el cual puede reunir cargas específicas y/o requerimientos de rigidez sin gastar material donde no es necesario.

Si los requerimientos de diseño son simples, ósea las fuerzas y rigideces están a lo largo del eje longitudinal, un alto porcentaje del material deberá estar orientado unidireccionalmente. Si en dicho material se adhieren restricciones, teóricamente todas las fibras pueden ser así orientadas, como se muestra en la figura 3.3.

El cargas de cizalle o rigidez de cizalle las primeras consideraciones de diseño, serán que las fibras deberán estar orientadas a $\pm 45^\circ$ con respecto al eje longitudinal, ya que esto proporciona las mas altas propiedades de cizalle, como se muestra en la figura 3.4. Sin embargo, el cuidado debe tenerse para evaluar cualquier carga en las direcciones longitudinales o transversales, estas condiciones que normalmente no serían críticas en el metal pueden acercarse o exceder las fuerzas disponibles en estas direcciones al usar solo $\pm 45^\circ$. Esta consideración se hace necesaria para incluir por lo menos un número mínimo de láminas a 0° y/o 90° .

Además existen muchas aplicaciones donde se requiere resistir de combinación de cargas, donde hay fuerzas axiales puras o de cizalle combinadas, como lo muestra la figura 3.5

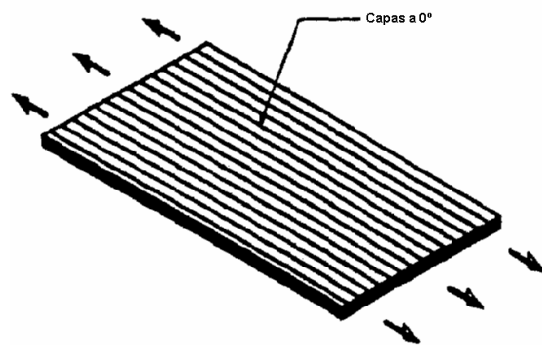


Figura 3.3. Secuencia efectiva de apilamiento en laminados sometidos a cargas axiales

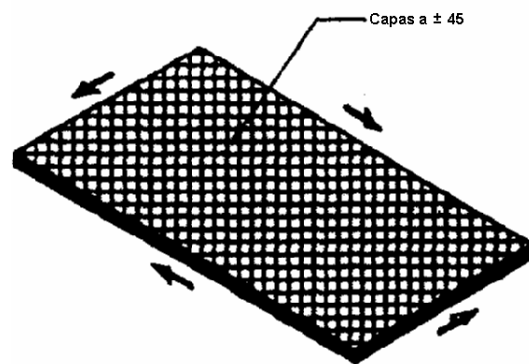


Figura 3.4. Secuencia efectiva de apilamiento en laminados sometidos a cargas de cizalle

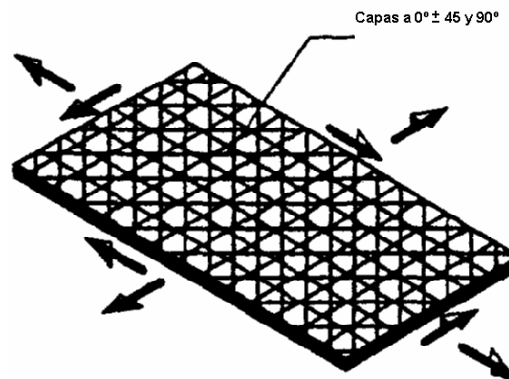


Figura 3.5. Secuencia efectiva de apilamiento en laminados sometidos a cargas combinadas

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Una de las mayores diferencias en el análisis de materiales compuestos o composites, al contrario de los metales, es una mayor preocupación de la deformación y no de los esfuerzos. Las estructuras compuestas se hacen a de diferente capas, y cada capa estará esforzada a diferentes niveles, por que los módulos elásticos de las capas son independientes de la orientación.

3.2.- Criterios de diseño y requisitos

El diseño de Carga Ultima (DCU), es la carga que cargara la estructura o miembro sin producir ruptura o colapso y es obtenida por la multiplicación la carga límite de diseño (CLD) y el factor de seguridad de **1.5**.

Es importante comprender que este factor pretende cubrir la exactitud de la carga, el análisis etc. Este factor no contiene alguna provisión para los problemas de fabricación o proceso de las partes creadas con materiales compuestos, ni para daño de impacto, daños producidos por el ambiente, etc.

La asignación incluida en las características de la degradación del material causada por los inadecuados procesos locales es separada de las variaciones estadísticas que siempre ocurren en la determinación del material asignado.

1.-Un acercamiento legítimo para la designación de aero-estructuras creadas con materiales compuestos incluyen los siguientes puntos:

- Análisis de los métodos
- Aproximación de los ensayos
- Sistema de materiales
- Diseño de conceptos
- La construcción del modelo
- Inspección de y reparación

2.- La selección de los ángulos de orientaron de las capas esta dada por:

i. Caso I: Ángulos Standard de 0° , 45° , -45° y 90° , (Ver figura 3.6):

- Estos son los ángulos de capas básicos que comúnmente se usan en el diseño de composites
- Estos 4 ángulos de capas satisfacen las cargas mínimas requeridas en el diseño y se recomienda porque simplificar fuertemente el análisis y la fabricación

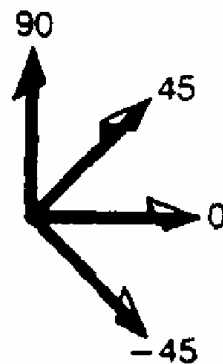


Figura 3.6. Ángulos recomendados

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

ii. Caso II: Ángulos arbitrarios, (Ver figura 3.7):

- Tiene un número limitado de usos de ángulos de capas no Standard t solo se permite cuando tal uso es crítico para la reducción de peso estructural y/o un diseño especial.
- El número de ángulos de capas diferente se uso para mantener un mínimo

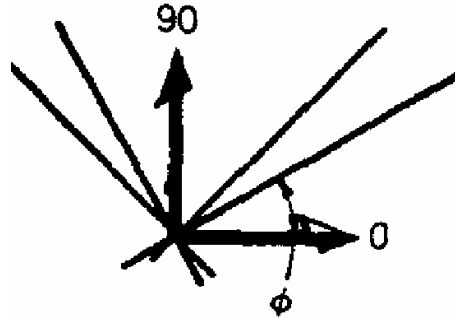


Figura 3.6. Ángulos No Recomendados Sin Previa Aprobación

3.- Espesor de materiales más común en el diseño de composite usados comúnmente en el diseño, (Solo referencia):

- Uní -cinta - Aproximadamente 0.005 a 0.0075 pulgadas (0.127 a 0.191 mm)
- Uní-cinta – 0.002 pulg. (0.0508 mm) (Muy costos y solo se una en aplicaciones especiales)
- Fabricación – 0.010 a 0.015 pulgadas (0.25 a 0.381 mm)

3.3 Análisis De Fuerza Laminado

Esta sección contiene una discusión corta de las deformaciones y esfuerzos principales y/o fundamentales en un punto para formar una base firme para el desarrollo de composites:

La teoría del laminado clásica es esfuerzo – deformación, las relaciones constitutivas y los criterios de falla para el laminado individual.

Cada lamina consiste en una capa de fibra unidireccional o tela tejida, se impregno y rodeado por el material de la matriz.

Las fibras fuertes y rígidas, proporcionan la carga primaria, mientras que la matriz protege las fibras y traslada la carga entre ellos.

La terminología de la teoría de laminados se describe a continuación:

i.- Micromecánica.- el estudio de la interacción entre la fibra y la matriz en una lámina, tal que pueda predecirse el comportamiento mecánico de la lámina desde el comportamiento conocida de los constituyentes:

- La relación de estabilidad Micromecánica entre las propiedades de los constituyentes, (la fibra y matriz) y aquéllos de la unidad de la capa del composites

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

- Complejas formulaciones que relacionan la forma, serie y interacciones han demostrado que un acercamiento de las regla de mezclas simple se basa en los fragmentos de volumen del constituyente
- los acercamientos de Ah exigen a un factor de la corrección ponerse en correlación con moderado recorra nivel o las pruebas del laminado

ANEXO 1

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Tablas.-

Tabla 1. Propiedades De Algunas Tipos De Fibras

Propiedad	Unidad	Kevlar	Vidrio E
Numero De Fibras Por Fin	--	580	204
Diámetro De Fibra	in	0.00046	0.00036
Densidad	lb/in ³	0.053	0.090
Modulo Longitudinal	10 ⁶ psi	22	10.6
Modulo Transversal	10 ⁶ psi	0.6	10.6
Modulo Longitudinal De Cizalle	10 ⁶ psi	0.42	4.37
Modulo Transversal De Cizalle	10 ⁶ psi	0.22	4.37
Radio de Poisson's Longitudinal	--	0.35	0.22
Radio de Poisson's Transversal	--	0.35	0.22
Energía Calórica	BTU/lb/°F	0.25	0.17
Conductividad Calórica Longitudinal	BTU/h/ft ² /°F/in	1.7	7.5
Conductividad Calórica Transversal	BTU/h/ft ² /°F/in	1.7	7.5
Coefficiente De Expansión Térmico Longitudinal	10 ⁶ in/in/°F	-2.2	2.8
Coefficiente De Expansión Térmico Transversal	10 ⁶ in/in/°F	30	2.8
Esfuerzo De Tensión Longitudinal	ksi	400	400
Esfuerzo De Comprensión Longitudinal	ksi	75	--
Esfuerzo De Cizalle	ksi	--	--

Tabla 2. Propiedades De Algunas Tipos De Resinas (Matrices)

Propiedad	Unidad	LM	IMLS	IMHS	HM
Densidad	lb/in ³	0.042	0.046	0.044	0.045
Módulos	10 ⁶ psi	0.32	0.50	0.50	0.75
Modulo De Cizalle	10 ⁶ psi	--	--	--	--
Radio de Poisson's	--	0.43	0.41	0.35	0.35
Energía Calórica	BTU/lb/°F	0.25	0.25	0.25	0.25
Conductividad Térmica	BTU/h/ft ² /°F/in	1.25	1.25	1.25	1.25
Coefficiente De Expansión Térmico	10 ⁶ in/in/°F	57	57	36	40
Difusividad	10 ⁻¹⁰ in ² /s	0.6	0.6	0.6	0.6
Coefficientes De Expansión De Humedad	in/in/M	0.33	0.33	0.33	0.33
Esfuerzo De Tensión	Ksi	8	7	15	20
Esfuerzo De Comprensión	Ksi	15	21	35	50
Esfuerzo De Cizalle	Ksi	8	7	13	15
Esfuerzo De Fractura Por Tensión	in/in %	8.1	1.4	2.0	2.0
Esfuerzo De Fractura Por Comprensión	in/in %	15	4.2	5.0	5.0
Esfuerzo De Fractura Por Cizalle	in/in %	10	3.2	3.5	4.0

Dr. Ing. Hamilton R. Quirós Bedwell

Ecuaciones.-

Componentes \bar{Q}_{ij} de la matriz de rigidez de la lámina, en coordenadas 12.

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\Q_{21} = Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\Q_{66} &= 1/S_{66} = G_{12}\end{aligned}\tag{a.1}$$

Componentes \bar{Q}_{ij} de la matriz de rigidez de la lámina, en coordenadas xy.

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta * \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta * \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta * \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta * \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta * \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta * \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta * \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta * \sin \theta\end{aligned}\tag{a.2}$$

Hamilton R. Quirós Bedwell.
Ing. En Polímeros.
Dr. En polímeros exotérmicos